Probleme AA
Setul 2

1. Un semnal real, aleator, $s(n)$ este perturbat de un zgomot alb necorelat cu semnalul, $w(n)$.

$$x(n) = s(n) + w(n)$$

Se cunosc:

$$r_{ss}(n) = a\alpha^{|n|},\ \alpha \in [0,1], \qquad a > 0, \qquad \frac{S}{Z} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_w^2} = b.$$

Calculaţi filtrul optim care estimează $s(n)$ pe baza observaţiilor $x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$ şi evaluaţi eroarea medie pătratică.
Discuţie în funcţie de parametrii *a*, *b*, α. Aplicaţie numerică: $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 0{,}8$.

2. Un semnal real, aleator, $s(n)$ este perturbat de un zgomot alb necorelat cu semnalul, $w(n)$.

$$x(n) = s(n) + w(n)$$

Se cunosc:

$$r_{ss}(n) = a\alpha^{|n|},\ \alpha \in [0,1], \qquad a > 0, \qquad \frac{S}{Z} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_w^2} = b.$$

Calculaţi filtrul optim care estimează $s(n+m)$, $m \geq 0$ pe baza observaţiilor $x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$ şi evaluaţi eroarea medie pătratică.
Discuţie în funcţie de parametrii *m*, *a*, *b*, α. Aplicaţie numerică: $a = 10$, $b = 5$, $\alpha = 0{,}8$.

3. Un proces aleator poate fi descris prin relaţia:

$$x(n) = \alpha \cdot x(n-1) + w(n)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb, cu varianţa σ_w^2. Calculaţi matricea de autocorelaţie de ordinul *N*. Demonstraţi că pentru orice ordin $N \geq 1$, coeficienţii filtrului predictor optim sunt:

$$\mathbf{w_0} = [\alpha, 0, \ldots 0]^T$$

şi eroarea medie pătratică este σ_w^2.

4. Determinaţi filtrele erorii de predicţie în sens direct, de ordinele 1 şi 2 şi varianţa erorii de predicţie pentru un proces aleator având:
$r_x(0) = 3$, $r_x(1) = 2$, $r_x(2) = 1$, $r_x(l) = 0$ pentru $|l| > 2$

5. Determinaţi filtrele erorii de predicţie în sens invers, de ordinele 1 şi 2 şi varianţa erorii de predicţie pentru un proces aleator având:
$r_x(0) = 3$, $r_x(1) = 2$, $r_x(2) = 1$, $r_x(l) = 0$ pentru $|l| > 2$

6. Determinaţi filtrele erorii de predicţie în sens direct, de ordinele 1 şi 2 şi varianţa erorii de predicţie pentru un proces aleator având:
$r_x(l) = 2 \cdot (0{,}8)^{|l|}$

7. Se doreşte estimarea unui semnal aleator $s(n)$ utilizând un filtru RFI cu $N = 2$. Observaţiile sunt de forma:

$$x(n) = s(n) - s(n-1) + w(n)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb cu varianţa $\sigma_w^2 = 10$, independent de semnalul $s(n)$. Semnalul se caracterizează prin $r_s(n) = 6 \cdot (0{,}8)^{|n|}$.
Determinaţi structura filtrului optim şi eroarea medie pătratică.

8. Determinaţi expresiile coeficienţilor filtrelor erorii de predicţie directă şi inversă şi a varianţei erorii, pentru $N = 2$, în funcţie de $r_{xx}(k) = r(k)$.

9. Determinaţi relaţiile de calcul pentru $a_{3,i}$, $i = 0,\ldots,3$, în funcţie de coeficienţii k_i, $i = 1,\ldots,3$ şi P_0.

10. Fie un proces staţionar în sens larg având:

$$r(0) = 1,\ r(1) = 0{,}8,\ r(2) = 0{,}6,\ r(3) = 0{,}4.$$

(a) Utilizând algoritmul Levinson-Durbin evaluaţi coeficienţii k_1, k_2, k_3.
(b) Desenaţi un filtru predictor în structură latice.
(c) Evaluaţi puterile medii ale erorilor de predicţie la ieşirile fiecărei celule. Reprezentaţi-le într-un grafic în funcţie de ordinul celulei.

11. Demonstraţi că Δ_{m-1}, definit prin

$$\Delta_{m-1} = \mathbf{r}_m^{BT} \cdot \mathbf{a}_{m-1}^*$$

poate fi calculat cu:

$$\Delta_{m-1} = E\left\{e_{m-1}^b(n-1) \cdot e_{m-1}^{f*}(n)\right\}$$

unde $e_{m-1}^f(n)$ reprezintă răspunsul filtrului erorii de predicţie directă de ordinul $m-1$, pentru secvenţa de intrare $x(n),\ldots,x(n-m+1)$, iar $e_{m-1}^b(n-1)$ este răspunsul filtrului de predicţie inversă, de ordin $m-1$, la secvenţa $x(n-1),\ldots,x(n-m)$.

12. Fie $x(n)$ un proces stationar descris prin

$$x(n) = 0{,}9 \cdot x(n-1) + w(n)$$

unde $w(n)$ reprezintă un zgomot alb de valoare medie nulă şi varianţă 1, necorelat cu $x(n)$.
Determinaţi coeficienţii filtrelor erorilor de predicţie atât în formă transversală cât şi în structură latice.

13. Urmărind acelaşi procedeu cu cel folosit pentru deducerea algoritmului Levinson-Durbin pentru predicţie directă, deduceţi un algoritm asemănător pentru predicţie inversă.
Indicaţie: se va porni de la:

$$\mathbf{a}_m^{B*} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} + k_m^* \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

14. Fie un proces staţionar în sens larg descris prin

$$x(n) = x(n-1) - 0{,}5 \cdot x(n-2) + w(n)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb de valoare medie nulă şi varianţă 0,5, necorelat cu semnalul $x(n)$.
(*Atenţie*! Eşantionul $x(n)$ depinde de $w(n)$).
(a) Calculaţi puterea medie a lui $x(n)$.
(b) Calculaţi coeficienţii de reflexie k_1 şi k_2.
(c) Calculaţi puterile erorilor de predicţie P_1 şi P_2.

15. Demonstraţi relaţia:

$$e_m^b(n) = e_{m-1}^b(n-1) + k_m^* e_{m-1}^f(n)$$

16. Utilizând mediul MATLAB precizaţi care dintre funcţiile de sistem de mai jos corespund unor filtre ale erorii de predicţie directă sau inversă. Pentru cazurile unde răspunsul este afirmativ, calculaţi şi desenaţi schema unui filtru care generează ambele erori de predicţie.

$$H_1(z) = 1 - 0{,}66z^{-1} - 0{,}5367z^{-2} + 1{,}2305z^{-3} - 1{,}1207z^{-4} + 0{,}2529z^{-5} + 0{,}9080z^{-6} - 0{,}6z^{-7}$$

$$H_2(z) = -1{,}6667 + 1{,}1z^{-1} + 0{,}8945z^{-2} - 2{,}0508z^{-3} + 1{,}8678z^{-4} - 0{,}4215z^{-5} - 1{,}5133z^{-6} + z^{-7}$$

$$H_3(z) = 0{,}2857 - 0{,}3841z^{-1} - 0{,}4434z^{-2} + 0{,}8429z^{-3} - 0{,}5995z^{-4} - 0{,}2730z^{-5} + z^{-6}$$

$$H_4(z) = 1 + 0{,}7z^{-1} + 0{,}9z^{-2} + 1{,}1z^{-3} + 0{,}9z^{-4} + 0{,}7z^{-5} + z^{-6}$$

17. Utilizând mediul MATLAB precizaţi care dintre funcţiile de sistem de mai jos corespund unor filtre ale erorii de predicţie directă sau inversă. Pentru cazurile unde răspunsul este afirmativ, calculaţi şi desenaţi schema unui filtru care generează ambele erori de predicţie.

$$H_1(z) = 1 - 2z^{-1} + 1{,}71z^{-2} - 1{,}71z^{-3} + 0{,}105z^{-4}$$

$$H_2(z) = 0{,}0905 - 0{,}6606z^{-1} + 1{,}8145z^{-2} - 2{,}2104z^{-3} + z^{-4}$$

$$H_3(z) = 2{,}1978 - 6{,}5934z^{-1} + 7{,}4945z^{-2} - 4{,}1978z^{-3} + z^{-4}$$

$$H_4(z) = 1 - 3z^{-1} + 3{,}41z^{-2} - 1{,}91z^{-3} + 0{,}455z^{-4}$$

18. Utilizând mediul MATLAB precizaţi care dintre funcţiile de sistem de mai jos corespund unor filtre ale erorii de predicţie directă sau inversă. Pentru cazurile unde răspunsul este afirmativ, calculaţi şi desenaţi schema unui filtru care generează ambele erori de predicţie.

$$H_1(z) = 1 - 2{,}4z^{-1} + 2{,}5z^{-2} - 1{,}03z^{-3} + 0{,}2264z^{-4} - 0{,}0186z^{-5}$$

$$H_2(z) = 1 - 3{,}2z^{-1} + 3{,}85z^{-2} - 2{,}19z^{-3} + 0{,}5864z^{-4} - 0{,}0557z^{-5}$$

$$H_3(z) = -0{,}0186 + 0{,}2264z^{-1} - 1{,}03z^{-2} + 2{,}5z^{-3} - 2{,}4z^{-4} + z^{-5}$$

$$H_4(z) = -0{,}0557 + 0{,}5864z^{-1} - 2{,}19z^{-2} + 3{,}85z^{-3} - 3{,}2z^{-4} + z^{-5}$$

19. Utilizând mediul MATLAB precizaţi care dintre funcţiile de sistem de mai jos corespund unor filtre ale erorii de predicţie directă sau inversă. Pentru cazurile unde răspunsul este afirmativ, calculaţi şi desenaţi schema unui filtru care generează ambele erori de predicţie.

$$H_1(z) = 1 - 2z^{-1} + 1{,}71z^{-2} - 1{,}71z^{-3} + 0{,}105z^{-4}$$

$$H_2(z) = -1{,}6667 + 1{,}1z^{-1} + 0{,}8945z^{-2} - 2{,}0508z^{-3} + 1{,}8678z^{-4} - 0{,}4215z^{-5} - 1{,}5133z^{-6} + z^{-7}$$

$$H_3(z) = -0{,}0186 + 0{,}2264z^{-1} - 1{,}03z^{-2} + 2{,}5z^{-3} - 2{,}4z^{-4} + z^{-5}$$

$$H_4(z) = 1 - 2{,}4z^{-1} + 2{,}5z^{-2} - 1{,}03z^{-3} + 0{,}2264z^{-4} - 0{,}0186z^{-5}$$

20. Scrieţi un program în MATLAB care, având drept date de intrare vectorul de autocorelaţie şi ordinul N, să genereze coeficienţii filtrelor erorii de predicţie, atât în formă transversală cât şi latice, precum şi puterile erorilor de predicţie, utilizând algoritmul Levinson-Durbin.

Evaluaţi numărul de operaţii (înmulţiri şi adunări) în funcţie de N. Examinaţi resursele mediului MATLAB în acest domeniu.

Testaţi programul realizat, comparând rezultatele cu cele obţinute prin scrierea ecuaţiilor Wiener-Hopf în forma extinsă şi rezolvarea sistemului respectiv. Ca date de test, se va genera o secvenţă de autocorelaţie pentru un proces staţionar în sens larg, cu valoare medie nulă şi varianţa 1, iar $r_{xx}(k) = 0{,}5^k s(k)$, unde $s(k)$ este o secvenţă aleatoare, cu distribuţie uniformă între $[-1,1]$.

21. Scrieţi un program în MATLAB pentru trecerea de la forma transversală a filtrului erorii de predicţie înainte la forma latice. La fel pentru predicţie înapoi. Aplicaţi-l pentru funcţiile adecvate de la exerciţiul 18. Examinaţi resursele MATLAB în acest domeniu.

22. Scrieţi un program în MATLAB pentru trecerea de la forma latice la forma transversală a filtrului erorii de predicţie înainte şi înapoi. Verificaţi, aplicându-l pentru cazul k_1=0,8, k_2=0,4, k_3=0,2. Examinaţi resursele MATLAB în acest sens.

23. Fie procesul aleator staţionar definit prin:

$$r_{xx}(k) = \delta(k) + 0{,}9^{|k|}\cos(k\pi/4)$$

Calculaţi predictorii de ordinul doi cu 1, 2, 3, 4 paşi şi puterile erorilor de predicţie corespunzătoare. Comentaţi rezultatul.

24. Fie $x(n)$ un proces aleator staţionar definit prin:

$$x(n) = 4w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb cu puterea medie P. Calculați și desenați schema unor filtre de diferite ordine care generează o predicție pentru $x(n+1)$ și evaluați erorile de predicție.

25. Fie $x(n)$ un proces aleator staţionar definit prin:

$$x(n) = 2w(n) - w(n-1) + w(n-2)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb cu puterea medie P. Calculați și desenați schema unor filtre de diferite ordine care generează o predicție pentru $x(n+2)$ și evaluați erorile de predicție.

26. Fie $x(n)$ un proces aleator staţionar definit prin:

$$x(n) = 4w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb cu puterea medie P. Calculați și desenați schema unor filtre de diferite ordine care generează o predicție pentru $x(n+3)$ și evaluați erorile de predicție.

27. Fie $x(n)$ un proces aleator staţionar definit prin:

$$x(n) = 2w(n) - w(n-1) + w(n-2)$$

unde $w(n)$ este un zgomot alb cu puterea medie P. Calculați și desenați schema unor filtre care generează o predicție de ordinul 3 pentru $x(n+1)$, $x(n+2)$ și $x(n+3)$ și evaluați erorile de predicție.

28. Demonstrați că

$$E\left\{e_r^b(n)e_l^{b*}(n)\right\} = \begin{cases} 0, & r \neq l \\ P_r = P_l, & r = l \end{cases}$$

29. Demonstrați că

$$E\left\{e_r^f(n+r)e_l^{f*}(n+l)\right\} = \begin{cases} 0, & r \neq l \\ P_r = P_l, & r = l \end{cases}$$

30. Demonstrați că

$$E\left\{e_r^f(n)e_r^{b*}(n-1)\right\}=-k_{r+1}P_r$$

Indicație: vezi algoritmul Levinson-Durbin.

31. Demonstrați că

$$E\left\{e_r^f(n)e_l^{f*}(n)\right\}=\max\left\{P_r,P_l\right\}$$

32. Pentru un filtru adaptiv bazat pe metoda pantei descendente maxime, se cunosc:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}25\end{pmatrix}$$

- Pentru ce valori ale parametrului μ algoritmul SD este convergent?
- Alegând o valoare în acest domeniu, determinaţi relaţiile de calcul pentru $w_1(n)$ şi $w_2(n)$ pornind de la condiţii iniţiale nule.
- Studiaţi efectul variaţiei lui μ asupra traiectoriei lui $\mathbf{w}(n)$.

33. Formulaţi o metodă de gradient dacă funcţia cost este $J(n)=|e(n)|^2$.

34. Fie un proces aleator staţionar în sens larg având:

$r(0)=1,\ \ r(1)=0{,}8,\ \ r(2)=0{,}6,\ \ r(3)=0{,}4,\ \ r(i)=0,\ \ pentru\ \ i>3$.

Deduceţi elementele filtrului erorii de predicţie în structură latice utilizând algoritmul Schur. Transformaţi apoi acest filtru în structură transversală.

35. Fie un proces aleator staţionar în sens larg având:

$r(0)=1,\ \ r(1)=0{,}5,\ \ r(2)=0{,}5,\ \ r(3)=0{,}25$.

a) Calculaţi elementele filtrului erorii de predicţie şi a filtrului predictor în structura transversală utilizând algoritmul Levinson-Durbin.
b) Aceleaşi chestiuni, în structura latice.
c) Aceleaşi chestiuni ca la punctul b), dar cu algoritmul Schur.

36. (MATLAB) Un proces autoregresiv este descris prin:

$$x(n)+a_1\cdot x(n-1)=v(n)$$

unde $v(n)$ este un zgomot alb cu valoare medie nulă şi varianţa σ_v^2. Fie următoarele setori de valori pentru parametrii a_1 şi σ_v^2:

- $a_1=-0{,}1;\ \ \sigma_v^2=0{,}99$
- $a_1=-0{,}5;\ \ \sigma_v^2=0{,}75$
- $a_1=-0{,}8152;\ \ \sigma_v^2=0{,}3305$
- $a_1=-0{,}9802;\ \ \sigma_v^2=0{,}0392$

Procesul este aplicat unui predictor de ordinul 2, bazat pe metoda pantei descendente maxime (SD).

a) Calculaţi în fiecare caz valorile admisibile pentru μ.
b) Construiţi curbele eroare medie pătratică constantă în funcţie de $v_1(n)$ şi $v_2(n)$, pentru seturile de parametrii date mai sus. Pentru aceasta suprapuneţi traiectoriile descrise prin modificarea coeficienţilor, cu *n*, presupunând $\mu=0{,}3$ şi condiţii iniţiale nule.
c) Repetaţi punctul b) în funcţie de $w_1(n)$ şi $w_2(n)$.
d) Reprezentaţi curbele de învăţare, $J(n)$, în toate cele patru cazuri, pentru: $\mu=0{,}02,\ \ \mu=0{,}05,\ \ \mu=0{,}2$. Discuţie.

37. (MATLAB) Un proces autoregresiv de ordinul 2 este descris prin:

$$x(n)+a_1\cdot x(n-1)+a_2\cdot x(n-2)=v(n)$$

unde $v(n)$ este un zgomot alb cu valoare medie nulă şi varianţa σ_v^2.
Fie următorul set de valori:

- $a_1 = -0{,}10025;\ \ a_2 = 0{,}0025;\ \ \sigma_v^2 = 0{,}99$
- $a_1 = -0{,}5359;\ \ a_2 = -0{,}0718;\ \ \sigma_v^2 = 0{,}7461$
- $a_1 = -1{,}0390;\ \ a_2 = 0{,}2699;\ \ \sigma_v^2 = 0{,}3065$
- $a_1 = -1{,}6364;\ \ a_2 = 0{,}6694;\ \ \sigma_v^2 = 0{,}0216$

Procesul este aplicat unui predictor liniar de ordinul 2. Efectuaţi punctele a-d de la problema 36, în acest caz.

38. Fie funcţia de cost:

$$J(n) = \left|e(n)\right|^2 + \alpha\left\|\mathbf{w}(n)\right\|^2$$

cu α constantă. În algoritmul "leaky LMS" această funcţie de cost este minimizată în raport cu coeficienţii $\mathbf{w}(n)$.

a) Arătaţi că ecuaţia de reactualizare a coeficienţilor este de forma:

$$\mathbf{w}(n+1) = (1-\mu\alpha)\mathbf{w}(n) + \mu \cdot \mathbf{x}(n) \cdot e^*(n)$$

unde $0 < \alpha < \dfrac{1}{1-\mu}$.

b) Acceptând ipotezele de independenţă, arătaţi că:

$$\lim_{n\to\infty} E\{\mathbf{w}(n)\} = (\mathbf{R} + \alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{p}$$

Deduceţi condiţiile de convergenţă în medie.

39. (MATLAB) Fie un proces autoregresiv $x(n)$ de ordinul 1:

$$x(n) + a_1 \cdot x(n-1) = v(n)$$

unde $v(n)$ este un zgomot alb cu valoare medie nulă şi varianţa σ_v^2. Parametrii a_1 şi σ_v^2 sunt:

- $a_1 = -0{,}8182;\ \ \sigma_v^2 = 0{,}3305$
- $a_1 = -0{,}9802;\ \ \sigma_v^2 = 0{,}0392$

Acesta este aplicat unui predictor de ordinul 2, lucrând pe baza algoritmului gradientului stochastic (LMS).

a) Stabiliţi domeniul valorilor lui μ pentru convergenţa în medie.
b) Stabiliţi domeniul valorilor lui μ pentru convergenţa în medie pătratică.
c) Generaţi 256 eşantioane ale procesului $x(n)$. Pentru $\mu = 0{,}05$ şi $\mu = 0{,}005$ trasaţi curbele de învăţare $J(n)$ ale algoritmului, mediind pe 200 de rulări independente ale experimentului. Estimaţi valorile dezadaptării, făcând o mediere pe ultimile 200 de iteraţii ale curbelor mediate pe ansamblu. Comparaţi cu valorile teoretice.
d) Estimaţi valorile medii ale lui $w_1(\infty)$ şi $w_2(\infty)$ (mediind pe 200 de rulări independente, ultimile valori ale lui $w_1(n)$ şi $w_2(n)$). Comparaţi cu rezultatele teoretice. Discuţie.
e) Estimaţi valoarea dezadaptării şi comparaţi cu valoarea teoretică.

40. (MATLAB) Fie un proces autoregresiv de ordinul 2, cu:

- $a_1 = -0{,}1;\ \ a_2 = -0{,}8;\ \ \sigma_v^2 = 0{,}27$
- $a_1 = -0{,}1636;\ \ a_2 = -0{,}8;\ \ \sigma_v^2 = 0{,}119$
- $a_1 = -0{,}196;\ \ a_2 = -0{,}8;\ \ \sigma_v^2 = 0{,}0111$

Acesta este aplicat unui predictor adaptiv de ordinul 2, lucrând pe baza algoritmului LMS. Efectuaţi toate cerinţele de la problema precedentă.

41. (MATLAB) Algoritmul "clipped" LMS, pentru date reale se defineşte prin:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \cdot e(n) \cdot sign\{\mathbf{x}(n)\}$$

Procesul autoregresiv de la problema 40 este aplicat unui predictor de ordinul 2, lucrând pe baza algoritmului "clipped" LMS. Efectuaţi toate cerinţele de la problema 39.

42. Demonstraţi că setul de coeficienţi **w**(n) care minimizează funcţia cost

$$J(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|e(i)|^2$$

unde

$$e(i)=d(i)-y(i)=d(i)-\mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(i);$$
$$\mathbf{x}(i)=[x(i),x(i-1),\cdots,x(i-N+1)]^T$$

verifică ecuaţia normală

$$\mathbf{\Phi}(n)\mathbf{w}(n)=\mathbf{\theta}(n)$$

unde

$$\mathbf{\Phi}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i)$$
$$\mathbf{\theta}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)d^*(i)$$

43. Demostraţi că pentru un process aleatoriu staţionar,

$$\mathbf{\Phi}(n)=k\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i)$$

reprezintă un estimator în general deplasat al matricei de autocoelaţie. Calculaţi k, astfel încât estimatorul să fie

- asimptotic nedeplasat
- nedeplasat

44. Demostraţi că pentru un process aleatoriu staţionar,

$$\mathbf{\theta}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)d^*(i)$$

reprezintă un estimator în general deplasat al vectorului corelaţiilor dintre semnalul de intrare şi semnalul dorit. Calculaţi k, astfel încât estimatorul să fie

- asimptotic nedeplasat
- nedeplasat.

45. Demonstraţi că

$$\mathbf{\Phi}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^H(i)$$

este o matrice hermitică şi pozitiv semidefinită.

46. Demonstraţi că în condiţiile de la problema 42, relaţiile de ortogonalitate capătă forma

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{x}(i)e_{\min}^*(i)=\mathbf{0}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}y_o(i)e_{\min}^*(i)=0$$

47. Demonstraţi că în condiţiile de la problema 42, în cazul utilizării coeficienţilor optimi,

$$J_{\min}(n)=E_d(n)-E_y(n)$$

unde

$$E_d(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|d(i)|^2$$
$$E_y(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}|y_o(i)|^2$$