6.3 FACTORIZAREA SPECTRALĂ. TEOREMA LUI WOLD

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- Densitatea spectrală de putere, $P_{xx}(e^{j\omega})$, pentru un proces aleator discret, staţionar în sens larg, este o funcţie :
  - reală
  - pozitivă
  - periodică.
- *Factorizarea spectrală* a lui $P_{xx}(z)$:
- Dacă $P_{xx}(e^{j\omega})$ este o funcţie continuă de ω, $P_{xx}(z)$ poate fi factorizat sub forma:

$$P_{xx}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- Fie $x(n)$ un proces staţionar în sens larg, cu valoare medie nulă şi cu o densitate spectrală de putere $P_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$, continuă (ceea ce presupune absenţa componentelor periodice):

$$P_{xx}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n) z^{-n}$$

- Să presupunem, în plus, că $\ln P_{xx}(z)$ este analitică într-o coroană circulară, conţinând cercul unitate

$$R<|z|<\frac{1}{R}, R<1$$

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- Rezultă că $\ln P_{xx}(z)$ şi toate derivatele sale sunt funcţii continue şi este posibilă o dezvoltare în serie Laurent:

$$\ln P_{xx}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) z^{-n}$$

$$\ln P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}$$

- Din ultima relaţie rezultă că $a(n)$ reprezintă coeficienţii dezvoltării în serie Fourier ai funcţiei periodice $\ln P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- $\ln P_{xx}\left(e^{j\omega}\right)$ e o funcţie reală ⇒ secvenţa $a(n)$ este conjugat simetrică

$$a(n) = a^*(-n)$$

$$a(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln P_{xx}\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

- Secvenţa $a(n)$ poartă numele de ***cepstrum*** al secvenţei $r_{xx}(n)$

$$P_{xx}(z) = \exp\{a(0)\}\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(n) z^{-n}\right\}\exp\left\{\sum_{n=-\infty}^{-1} a(n) z^{-n}\right\}$$

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- Vom defini:

$$Q(z) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(n) z^{-n}\right\}, \quad |z| > R$$

- Deoarece $Q(z)$ şi ln $Q(z)$ sunt analitice în $|z|>R$ => $Q(z)$ este o funcţie de fază minimă.
- Ultimul termen din factorizarea lui P(z) mai poate fi scris :

$$\exp\left\{\sum_{n=-\infty}^{-1} a(n) z^{-n}\right\} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(-n) z^{n}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\left(\frac{1}{z^*}\right)^{-n}\right\}^* = Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- aşa încât:

$$P_{xx}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

- unde

$$\sigma_0^2 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} \ln P\left(e^{j\omega}\right) d\omega\right\}$$

- Un proces care îndeplineşte condiţiile precizate mai înainte şi admite o asemenea factorizare spectrală se spune că este un *proces regulat*.

Proprietăţi ale proceselor regulate.

- Un asemenea proces poate fi considerat ca ieşirea unui filtru stabil şi cauzal, având la intrare zgomot alb cu varianţa σ_0^2 (*reprezentare cu ajutorul inovaţiilor*).

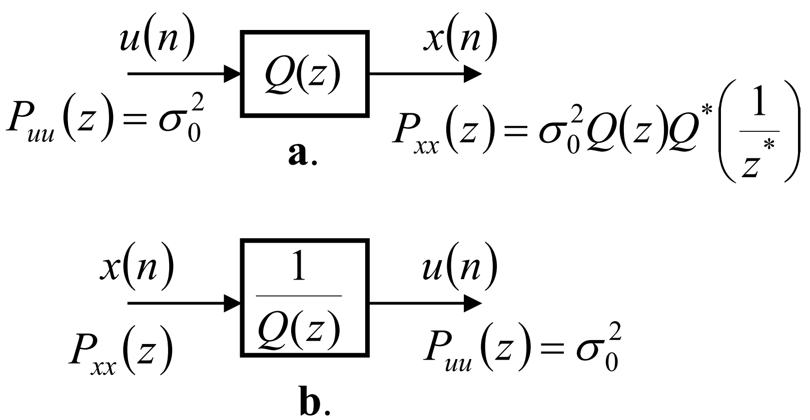


Fig. 2.4 Reprezentarea unui proces staţionar în sens larg cu ajutorul inovaţiilor

Proprietăţi ale proceselor regulate.

- Filtrul având funcţia de transfer inversă, $1/Q(z)$, poate fi considerat un *filtru de albire* pentru procesul aleator cu densitatea spectrală de putere $P_{xx}(z)$.
- $Q(z)$ poate fi reprezentat printr-o serie de puteri:

$$Q(z) = q(0) + q(1)z^{-1} + q(2)z^{-2} + \ldots$$

- unde $q(0) = 1$, deoarece evident

$$\lim_{z\to\infty} Q(z) = q(0) = 1$$

Proprietăţi ale proceselor regulate.

- Dacă $P_{xx}(z)$ este o funcţie raţională, atunci

$$Q(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- şi factorizarea are forma:

$$P_{xx}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \sigma_0^2 \frac{B(z)B^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}{A(z)A^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}$$

unde:

$$A(z) = 1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2} + \ldots + a(N)z^{-N}$$

$$B(z) = 1 + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + \ldots + b(M)z^{-M}$$

- iar polinoamele $A(z)$, $B(z)$ au toate zerourile în interiorul cercului de rază unitate.

6.3.2 Teorema lui Wold

- Un proces staţionar în sens larg poate fi descompus în două procese ortogonale:
  – *un proces regulat* $x_r(n)$
  – *un proces predictibil* $x_p(n)$
- Se spune că un proces $x_p(n)$ este predictibil dacă există un set de coeficienţi $a(n)$, aşa încât:

$$x_p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a(k) x_p(n-k)$$

- Altfel spus, orice eşantion poate fi determinat fără eroare, cunoscând eşantioanele precedente.

6.3.2 Teorema lui Wold

- Pentru un asemenea proces, densitatea spectrală de putere este de forma:

$$P_p\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta(\omega - \omega_k)$$

- Rezultă că o formă generală a densităţii spectrale de putere este:

$$P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) = P_r\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta(\omega - \omega_k)$$

unde $P_r(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$, partea continuă a spectrului, corespunde unui proces regulat.

6.4 Elemente de teoria estimării

- **Estimare:** deducerea valorilor unor mărimi necunoscute sau aleatoare pornind de la un set de observaţii ce reprezintă variabile aleatoare.

a. *Estimarea parametrilor* - aflarea unor parametri determinişti dar necunoscuţi pornind de la setul de observaţii. Exemple: determinarea valorii medii, a funcţiei de autocorelaţie, a densităţii spectrale de putere pentru un proces aleator staţionar.

b. *Estimarea unei variabile aleatoare*. De exemplu, determinarea eşantioanelor de la intrarea unui sistem cunoscând ieşirea acestuia, suprapusă peste un zgomot.

6.4 Elemente de teoria estimării

- In cele ce urmează ne vom concentra atenţia numai asupra primului aspect.
- Să presupunem că se doreşte estimarea unui parametru θ al densităţii de probabilitate $w_x(x;\theta)$ a unui proces aleator x pe baza observaţiilor .

$$\mathbf{x}^o = [x(0), x(1), \ldots, x(N-1)]^T$$

- Vom nota cu $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x}^o)$

  o estimare a lui θ, realizată pe baza setului de observaţii $\mathbf{x}^o$. Aceasta este evident o funcţie de $\mathbf{x}^o$ (vector aleator) şi în consecinţă este de asemenea o variabilă aleatoare.

6.4 Elemente de teoria estimării

- Pentru aprecierea unui estimator se pot utiliza diverşi indicatori.
- *Deplasarea* unui estimator se defineşte prin:

$$\mathrm{B}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta$$

- Se spune că estimatorul e nedeplasat dacă:

$$\mathrm{B}(\theta) = 0$$

- Dacă $\mathrm{B}(\hat{\theta}) \to 0$ când $N \to \infty$, estimatorul se numeşte *asimptotic nedeplasat*.

6.4 Elemente de teoria estimării

- *Eroarea pătratică medie*:

$$\mathrm{EPM} = \mathrm{E}\left\{\left|\hat{\theta} - \theta\right|^2\right\}$$

- *Varianţa* şi *dispersia*:

$$\mathrm{var}(\hat{\theta}) = \sigma_{\hat{\theta}}^2 = \mathrm{E}\left\{\left|\hat{\theta} - \mathrm{E}(\hat{\theta})\right|^2\right\}$$

- *Consistenţa* unui estimator. Un estimator e consistent dacă pentru orice ε>0, oricât de mic,

$$\lim_{N \to \infty} \Pr\left\{\left|\hat{\theta} - \theta\right| > \varepsilon\right\} = 0$$

6.4 Elemente de teoria estimării

- *Funcţia de plauzibilitate* este definită prin densitatea de probabilitate

$$l(\theta) = w_x(x,\theta)$$

- În unele cazuri este mai convenabil să se lucreze cu logaritmul acestei funcţii,

$$L(\theta) = \ln(w_x(x,\theta))$$

- Dacă θ este un vector cu M componente, $L(\theta)$ este şi el un vector

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}) = [L(\theta_1), L(\theta_2), \ldots, L(\theta_M)]^T$$

6.4 Elemente de teoria estimării

- *Măsura informaţiei unui parametru în sensul Fischer*

$$I(\theta) = -\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2}\right\} = -\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^2 \ln w_x(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right\}$$

- Exprimare echivalentă

$$I(\theta) = \mathrm{E}\left\{\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right\} = \mathrm{E}\left\{\left(\frac{\partial \ln w_x(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right\}$$

6.4 Elemente de teoria estimării

- O posibilitate de a găsi un estimator este de a maximiza după θ funcţia de plauzibilitate,

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \arg\max_{\theta}\{w_x(\mathbf{x},\theta)\}$$

- Un asemenea estimator se numeşte *de plauzibilitate maximă.*

6.4 Elemente de teoria estimării

- *Marginea Cramér-Rao* reprezintă o valoare minimă pentru varianţa unui estimator nedeplasat.
- În cazul unui estimator θ scalar, presupunând că derivata a doua a funcţiei $L(\theta)$ există şi este absolut integrabilă,

$$\mathrm{var}(\hat{\theta}) = \sigma_{\hat{\theta}}^2 \geq I^{-1}(\theta)$$

- În relaţia de mai sus se obţine egalitate dacă şi numai dacă estimatorul satisface relaţia

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta = K(\theta)\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}$$

în care $K(\theta)$ nu depinde de valoarea estimată.

6.4 Elemente de teoria estimării

- Dacă această limită este atinsă, se spune că estimatorul este *de varianţă minimă* sau că este *eficient*.

Aplicaţii - 1. *Estimarea valorii medii.*

- Fie o variabilă aleatoare reală, gaussiană, caracterizată prin:

$$w_x(x;m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_0^2}}$$

- Să presupunem cunoscut setul de observaţii independente $\mathbf{x} = [x_0, x_1, ..., x_{N-1}]^T$. Densitatea de probabilitate de ordinul *N* este deci:

$$w_x(\mathbf{x};m) = \prod_{i=0}^{N-1} w_x(x_i;m) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma_0^2}}$$

1. *Estimarea valorii medii.*

$$L(m) = -\frac{N}{2}\ln\left(2\pi\sigma_0^2\right) - \sum_{i=0}^{N-1}\frac{\left(x_i - m\right)^2}{2\sigma_0^2}$$

$$\frac{\partial L(m)}{\partial m} = \sum_{i=0}^{N-1}\frac{x_i - m}{\sigma_0^2}$$

- Egalând cu 0 această cantitate se obţine estimatorul de plauzibilitate maximă:

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

- Estimatorul este nedeplasat, căci:

$$\mathrm{E}\{\hat{m}\} = \frac{1}{N}\mathrm{E}\left\{\sum_{i=0}^{N-1} x_i\right\} = m$$

1. *Estimarea valorii medii.*

- Deoarece observaţiile au fost presupuse independente, varianţa estimatorului este

$$\mathrm{var}\{\hat{m}\} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{var}\{x_i\} = \frac{\sigma_0^2}{N}$$

- În fine, $I(m) = -\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^2 L(m)}{\partial m^2}\right\} = \frac{N}{\sigma_0^2}$

deci $\mathrm{var}(\hat{m}) = I^{-1}(m)$

aşa încât estimatorul este şi de varianţă minimă.

- Lucrul acesta era de aşteptat având în vedere că

$$\hat{m}(\mathbf{x}) - m = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i - m = \frac{\sigma_0^2}{N}\frac{\partial L(m)}{\partial m}$$

2. *Estimarea dispersiei.*

- Pentru acelaşi caz al variabilei gaussiene,

$$\frac{\partial L(\sigma_0^2)}{\partial(\sigma_0^2)} = -\frac{N}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(x_i - m)^2}{\sigma_0^4}$$

- Egalând cu zero se obţine estimatorul varianţei:

$$\frac{\partial L(\sigma_0^2)}{\partial(\sigma_0^2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i - m)^2$$

- Dacă *m* nu este cunoscut, se va utiliza pentru el estimatorul obţinut mai înainte:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i - \hat{m})^2$$

2. *Estimarea dispersiei.*

- Să calculăm valoarea medie a estimatorului:

$$\mathrm{E}\{\hat{\sigma}_0^2\} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\mathrm{E}\{x_i^2\} + \mathrm{E}\{\hat{m}^2\} - 2\,\mathrm{E}\{x_i\hat{m}\}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\mathrm{E}\{x_i^2\} + \frac{1}{N^2}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{E}\{x_l x_j\} - \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{E}\{x_i x_j\}\right)$$

- Observaţiile fiind presupuse independente:

$$\mathrm{E}\{x_i x_j\} = \begin{cases} \mathrm{E}\{x_i^2\}, & i = j \\ \mathrm{E}\{x_i\}\mathrm{E}\{x_j\} = m^2, & i \neq j \end{cases}$$

aşa încât, ţinând seama şi de staţionaritate,

$$\mathrm{E}\{\hat{\sigma}_0^2\} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{N-1}{N}\left(\mathrm{E}\{x_i^2\} - m^2\right)\right) = \frac{N-1}{N}\sigma_0^2$$

2. *Estimarea dispersiei.*

- Se constată că estimatorii de plauzibilitate maximă a variantei sau ai dispersiei sunt deplasaţi. Totuşi,

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left\{\hat{\sigma}_0^2\right\} = \sigma_0^2$$

- deci ei sunt asimptotic nedeplasaţi. Uneori se preferă utilizarea *estimatorului nedeplasat al dispersiei*:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}\left(x_i - \hat{m}\right)^2}$$

3. *Estimatori pentru funcţia de autocorelaţie*

- Vom considera un proces aleator staţionar $x(n)$ de valoare medie nulă, deci:

$$r_{xx}(m) = c_{xx}(m) = \mathrm{E}\left\{x^*(n)x(n+m)\right\}$$

- Procesul fiind ergodic,

$$r_{xx}(m) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x^*(n)x(n+m)$$

- Ne propunem să găsim un estimator utilizând numai setul de observaţii $x(n)$, n=0,...,N–1, deci pornind de la:

$$x_N(n) = \begin{cases} x(n), & n \in [0, N-1] \\ 0 & n \notin [0, N-1] \end{cases}$$

3. *Estimatori pentru funcţia de autocorelaţie*

- Vom defini:

$$\hat{r}_{xx}(m)=\frac{1}{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_N^*(n)x_N(n+m)$$

unde M poate fi astfel ales încât să se obţină un estimator nedeplasat.

- Având în vedere suporturile finite,

$$\operatorname{supp} x_N(n)=\overline{[0,N-1]},\quad \operatorname{supp} x_N^*(n+m)=\overline{[-m,N-1-m]},$$

- rezultă $\hat{r}_{xx}(m)=0$ pentru $|m|>N$-1.

3. *Estimatori pentru funcţia de autocorelaţie*

- Pentru m=0,...,N–1, limitele de însumare vor fi 0 şi N–1–m, aşa încât în general vom putea scrie:

$$\hat{r}_{xx}(m)=\begin{cases}\frac{1}{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_N^*(n)x_N(n+m) & m\in\overline{[0,N-1]}\\ \hat{r}_{xx}^*(-m), & m\in\overline{[-(N-1),-1]}\\ 0, & |m|>N-1\end{cases}$$

3. *Estimatori pentru funcţia de autocorelaţie*

- Valoarea medie a estimatorului este:

$$\mathrm{E}\{\hat{r}_{xx}(m)\} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1-m} \mathrm{E}\left\{x^*(n)x(n+m)\right\} =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1-m} r_{xx}(m) = \frac{N-m}{M} r_{xx}(m), \quad m = 0,1,\ldots,N-1$$

- În mod asemănător, pentru $m = -(N-1),\ldots,-1$ se obţine:

$$\mathrm{E}\{\hat{r}_{xx}(m)\} = \frac{N+m}{M} r_{xx}(m)$$

3. *Estimatori pentru funcţia de autocorelaţie*

- Deci în general:

$$\mathrm{E}\left\{\hat{r}_{xx}(m)\right\} = \frac{N-|m|}{M} r_{xx}(m), \quad m \in \overline{\left[-(N-1),(N-1)\right]}$$

- şi rezultă o deplasare a estimatorului:

$$B(\hat{r}_{xx}(m)) = \mathrm{E}(\hat{r}_{xx}(m)) - r_{xx}(m) = \frac{N-|m|-M}{M} r_{xx}(m)$$

3. *Estimatori pentru funcţia de autocorelaţie*

- Pentru a obţine un *estimator nedeplasat* se poate lua $M=N-|m|$ deci:

$$\hat{r}_{xx}(m)=\begin{cases}\dfrac{1}{N-m}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_N^*(n)\,x_N(n+m) & m\in\overline{[0,N-1]}\\ \hat{r}_{xx}^*(-m), & m\in\overline{[-(N-1),-1]}\\ 0, & |m|>N-1\end{cases}$$

3. *Estimatori pentru funcţia de autocorelaţie*

- sau cu o exprimare unitară:

$$\hat{r}_{xx}(m)=\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1}x_N^*(n)x_N(n+m),\quad m\in\overline{[-(N-1),N-1]}$$

- Uneori se preferă să se ia $M=N$ şi rezultă:

$$\hat{r}_{xx}(m)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_N^*(n)\,x_N(n+m) & m\in\overline{[0,N-1]}\\ \hat{r}_{xx}^*(-m), & m\in\overline{[-(N-1),-1]}\\ 0, & |m|>N-1\end{cases}$$

3. *Estimatori pentru funcţia de autocorelaţie*

- Acesta este evident un *estimator deplasat*, deoarece:

$$E\left(\hat{r}_{xx}(m)\right) = \frac{N-|m|}{N} r_{xx}(m)$$

- Totuşi când $N \to \infty$

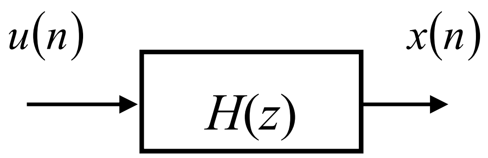
$$\lim_{N\to\infty} E\{\hat{r}_{xx}(m)\} = r_{xx}(m)$$

şi deci estimatorul acesta este *asimptotic nedeplasat*.

6.5 Modelarea Proceselor Aleatoare

- ***6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare***

- În multe cazuri întâlnite în practică, procesul aleator poate fi modelat ca ieşire $x(n)$ a unui sistem liniar, invariant în timp, caracterizat printr-o funcţie de transfer raţională, $H(z)$,



$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- căruia i se aplică la intrare un semnal $u(n)$.

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- Frecvent, $u(n)$ este un zgomot alb, el fiind cel care imprimă caracterul aleator al lui $x(n)$.
- Vom putea exprima deci $x(n)$ cu ajutorul ecuaţiei cu diferenţe finite:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k u(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k x(n-k)$$

- Model "ARMA" (auto regressive-moving average), deci *autoregresiv cu mediere mobilă*.
- $H(z)$ se presupune un filtru stabil şi cauzal, aşa încât nulurile lui $A(z)$ se găsesc în interiorul cercului $|z|=1$.

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

$$P_{xx}\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 P_{uu}\left(e^{j\omega}\right)$$

- În cazul când $u(n)$ este zgomot alb, cu $P_{uu}\left(e^{j\omega}\right) = \sigma^2$

$$P_{xx}\left(e^{j\omega}\right) = \sigma^2 \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

- Fără a pierde din generalitate, vom considera că $a_o = b_o = 1$, deoarece câştigul filtrului poate fi încorporat în σ^2.
- Se utilizează frecvent notaţia ARMA (M,N), care pune în evidenţă gradele numărătorului şi numitorului.

6.5.1 *Modele ARMA. Forme particulare*

- **Forme particulare**

- Modelul *autoregresiv* (AR), notat AR(N)=ARMA(0,N) se obţine pentru M=0.

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k x(n-k) + u(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

6.5.1 *Modele ARMA. Forme particulare*

- Modelul *mediere mobilă* (MA), notat MA(M)=ARMA(M,0), rezultă particularizând N=0:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k u(n-k)$$

$$H(z) = B(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

- Un proces ARMA(M,N), pentru M şi N finiţi, poate fi reprezentat printr-un proces AR(∞) sau printr-un proces MA(∞).

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- Exprimarea unui proces ARMA(1,1) ca un proces AR.

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \quad |a_1| < 1, \quad |b_1| < 1$$

- Pentru a-l exprima ca un model AR, $H(z)$ trebuie pus sub forma:

$$H(z) = \frac{1}{C(z)}, \quad C(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k} = \frac{z + a_1}{z + b_1}$$

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- Dar

$$c_k = Z^{-1}\left\{\frac{z + a_1}{z + b_1}\right\}(k)$$

- Deci

$$c_k = (a_1 - b_1)(-b_1)^{k-1} \quad \text{pentru} \quad k \geq 1$$

- Aproximarea procesului ARMA(1,1) cu un proces AR(L), cu L finit, va fi necesar un ordin L cu atât mai mare cu cât nulul $z = -b_1$ este mai apropiat de cercul $|z|=1$.

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- Exprimarea unui proces ARMA(1,1) ca un proces

$$H(z) = \frac{z+b_1}{z+a_1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k}$$

- din care

$$d_k = Z^{-1}\left\{\frac{z+b_1}{z+a_1}\right\}(k) = (b_1 - a_1)(-a_1)^{k-1} \quad \text{pentru} \quad k \geq 1$$

- Şi în acest caz, dacă se doreşte o aproximare a procesului ARMA(1,1) cu un proces MA(L) de ordin finit, L va fi cu atât mai mare cu cât polul $p = -a_1$ al procesului ARMA este situat mai aproape de cercul $|z|=1$.

6.5.2 Relaţii între parametrii modelului şi funcţia de autocorelaţie. Ecuaţiile Yule-Walker

- Vom presupune că $u(n)$ este un zgomot alb cu valoare medie nulă şi varianţă. Atunci:

$$P_{xx}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \frac{B^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}{A^*\left(\frac{1}{z^*}\right)} \sigma^2$$

6.5.2 Relaţii între parametrii modelului şi funcţia de autocorelaţie. Ecuaţiile Yule-Walker

- Sau

$$P_{xx}(z)A(z)=H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)B(z)\sigma^2$$

- Vom aplica transformata Z inversă acestei relaţii şi vom ţine seama că:

$$Z^{-1}\{P_{xx}(z)\}(k)=c_{xx}(k)=r_{xx}(k)$$

- deoarece $x(n)$ va avea şi el valoarea medie nulă, şi

$$Z^{-1}\left\{H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\right\}(n)=h^*(-n)$$

6.5.2 Relaţii între parametrii modelului şi funcţia de autocorelaţie. Ecuaţiile Yule-Walker

- Rezultă, folosind teorema convoluţiei şi cauzalitatea secvenţei $h(n)$:

$$\sum_{l=0}^{N}a_l r_{xx}(k-l)=\begin{cases}\sigma^2\sum_{l=0}^{M}b_l h^*(l-k)=\sigma^2\sum_{l=k}^{M}b_l h^*(l-k), & k=\overline{[0,M]}\\ 0, & k\ge M+1\end{cases}$$

- De unde:

$$r_{xx}(k)=\begin{cases}-\sum_{l=1}^{N}a_l r_{xx}(k-l)+\sigma^2\sum_{l=k}^{M}b_l h^*(l-k), & k=\overline{[0,M]}\\ -\sum_{l=1}^{N}a_l r_{xx}(k-l), & k\ge M+1\end{cases}$$

6.5.2 Relaţii între parametrii modelului şi funcţia de autocorelaţie. Ecuaţiile Yule-Walker

- În principiu, ele permit determinarea parametrilor modelului dacă se cunosc funcţiile de autocorelaţie.
- Rezolvarea sistemului este simplă doar în cazul proceselor AR, când, deoarece M=0, dispare practic a doua sumă, care imprimă un caracter neliniar ecuaţiilor.
- Pe de altă parte, ecuaţiile Yule-Walker oferă o metodă recursivă de calcul a funcţiilor de autocorelaţie, dacă sunt cunoscuţi parametrii modelului.

6.5.2 Relaţii între parametrii modelului şi funcţia de autocorelaţie. Ecuaţiile Yule-Walker

- Alegerea unui model adecvat procesului studiat este esenţială. Este util ca modelul ales să aibă un număr minim de parametri.
- In cazul în care procesul studiat se caracterizează printr-o densitate spectrală de putere cu maxime "ascuţite", este indicată alegerea unui model AR, ştiind că asemenea maxime se obţin datorită unor poli situaţi în apropierea cercului $|z|=1$.

6.5.2 Relaţii între parametrii modelului şi funcţia de autocorelaţie. Ecuaţiile Yule-Walker

- Dacă, din contră, ea se caracterizează prin minime pronunţate, eventual anulări, este indicată alegerea unui model MA cu zerouri situate în apropierea sau pe cercul $|z|=1$.
- Când intervin ambele tipuri de comportări ale densităţii spectrale de putere, se va alege un model ARMA.
- Un alt parametru ce trebuie avut în vedere este şi panta caracteristicii densitate spectrală de putere - frecvenţă. O pantă mare (variaţie rapidă) va necesita pentru simulare un proces AR sau ARMA de ordin mare.