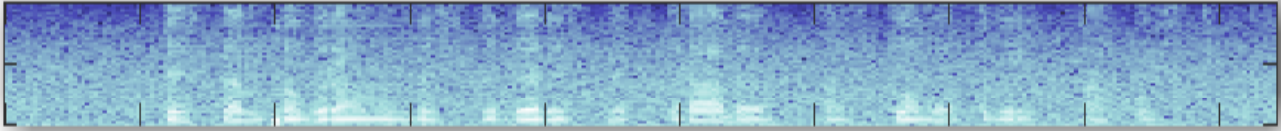


6.3 FACTORIZAREA SPECTRALĂ. TEOREMA LUI WOLD



6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- Densitatea spectrală de putere, $P_{xx}(e^{j\omega})$, pentru un proces aleator discret, staționar în sens larg, este o funcție :
 - reală
 - pozitivă
 - periodică.
- *Factorizarea spectrală* a lui $P_{xx}(z)$:
- Dacă $P_{xx}(e^{j\omega})$ este o funcție continuă de ω , $P_{xx}(z)$ poate fi factorizat sub forma:

$$P_{xx}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- Fie $x(n)$ un proces staționar în sens larg, cu valoare medie nulă și cu o densitate spectrală de putere $P_{xx}(e^{j\omega})$, continuă (ceea ce presupune absența componentelor periodice):

$$P_{xx}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n)z^{-n}$$

- Să presupunem, în plus, că $\ln P_{xx}(z)$ este analitică într-o coroană circulară, conținând cercul unitate

$$R < |z| < \frac{1}{R}, R < 1$$

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- Rezultă că $\ln P_{xx}(z)$ și toate derivatele sale sunt funcții continue și este posibilă o dezvoltare în serie Laurent:

$$\ln P_{xx}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)z^{-n}$$

$$\ln P_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)e^{-jn\omega}$$

- Din ultima relație rezultă că $a(n)$ reprezintă coeficienții dezvoltării în serie Fourier ai funcției periodice $\ln P_{xx}(e^{j\omega})$

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- $\ln P_{xx}(e^{j\omega})$ e o funcție reală \Rightarrow secvența $a(n)$ este conjugat simetrică

$$a(n) = a^*(-n)$$

$$a(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P_{xx}(e^{j\omega}) d\omega$$

- Secvența $a(n)$ poartă numele de *cepstrum* al secvenței $r_{xx}(n)$

$$P_{xx}(z) = \exp\{a(0)\} \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(n)z^{-n}\right\} \exp\left\{\sum_{n=-\infty}^{-1} a(n)z^{-n}\right\}$$

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- Vom defini:

$$Q(z) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(n)z^{-n}\right\}, \quad |z| > R$$

- Deoarece $Q(z)$ și $\ln Q(z)$ sunt analitice în $|z| > R \Rightarrow Q(z)$ este o funcție de fază minimă.
- Ultimul termen din factorizarea lui $P(z)$ mai poate fi scris :

$$\begin{aligned} \exp\left\{\sum_{n=-\infty}^{-1} a(n)z^{-n}\right\} &= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(-n)z^n\right\} = \\ &= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\left(\frac{1}{z^*}\right)^{-n}\right\}^* = Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \end{aligned}$$

6.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală

- așa încât:

$$P_{xx}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^* \left(\frac{1}{z^*} \right)$$

- unde

$$\sigma_0^2 = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P(e^{j\omega}) d\omega \right\}$$

- Un proces care îndeplinește condițiile precizate mai înainte și admite o asemenea factorizare spectrală se spune că este un *proces regulat*.

Proprietăți ale proceselor regulate.

- Un asemenea proces poate fi considerat ca ieșirea unui filtru stabil și cauzal, având la intrare zgomot alb cu varianța σ_0^2 (reprezentare cu ajutorul inovațiilor).

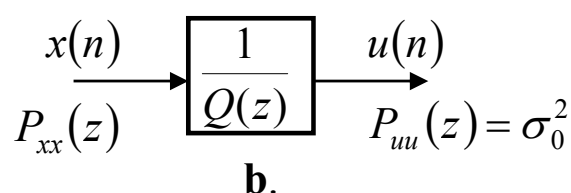
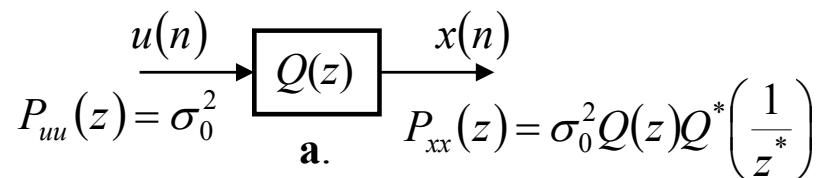


Fig. 2.4 Reprezentarea unui proces staționar în sens larg cu ajutorul inovațiilor

Proprietăți ale proceselor regulate.

- Filtrul având funcția de transfer inversă, $1/Q(z)$, poate fi considerat un *filtru de albire* pentru procesul aleator cu densitatea spectrală de putere $P_{xx}(z)$.

- $Q(z)$ poate fi reprezentat printr-o serie de puteri:

$$Q(z) = q(0) + q(1)z^{-1} + q(2)z^{-2} + \dots$$

- unde $q(0) = 1$, deoarece evident

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Q(z) = q(0) = 1$$

Proprietăți ale proceselor regulate.

- Dacă $P_{xx}(z)$ este o funcție rațională, atunci

$$Q(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- și factorizarea are forma:

$$P_{xx}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^* \left(\frac{1}{z^*} \right) = \sigma_0^2 \frac{B(z) B^* \left(\frac{1}{z^*} \right)}{A(z) A^* \left(\frac{1}{z^*} \right)}$$

unde:

$$A(z) = 1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2} + \dots + a(N)z^{-N}$$

$$B(z) = 1 + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + \dots + b(M)z^{-M}$$

- iar polinoamele $A(z)$, $B(z)$ au toate zerourile în interiorul cercului de rază unitate.

6.3.2 Teorema lui Wold

- Un proces staționar în sens larg poate fi descompus în două procese ortogonale:
 - *un proces regulat* $x_r(n)$
 - *un proces predictibil* $x_p(n)$
- Se spune că un proces $x_p(n)$ este predictibil dacă există un set de coeficienți $a(n)$, așa încât:

$$x_p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a(k)x_p(n-k)$$

- Altfel spus, orice eșantion poate fi determinat fără eroare, cunoscând eșantioanele precedente.

6.3.2 Teorema lui Wold

- Pentru un asemenea proces, densitatea spectrală de putere este de forma:

$$P_p(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \delta(\omega - \omega_k)$$

- Rezultă că o formă generală a densității spectrale de putere este:

$$P(e^{j\omega}) = P_r(e^{j\omega}) + \sum_{k=1}^N \alpha_k \delta(\omega - \omega_k)$$

unde $P_r(e^{j\omega})$, partea continuă a spectrului, corespunde unui proces regulat.

6.4 Elemente de teoria estimării

- **Estimare:** deducerea valorilor unor mărimi necunoscute sau aleatoare pornind de la un set de observații ce reprezintă variabile aleatoare.
- a. *Estimarea parametrilor* - aflarea unor parametri determinați dar necunoscuți pornind de la setul de observații. Exemple: determinarea valorii medii, a funcției de autocorelație, a densității spectrale de putere pentru un proces aleator staționar.
- b. *Estimarea unei variabile aleatoare.* De exemplu, determinarea eșantioanelor de la intrarea unui sistem cunoscând ieșirea acestuia, suprapusă peste un zgomot.

6.4 Elemente de teoria estimării

- In cele ce urmează ne vom concentra atenția numai asupra primului aspect.
- Să presupunem că se dorește estimarea unui parametru θ al densității de probabilitate $w_x(x;\theta)$ a unui proces aleator x pe baza observațiilor .

$$\mathbf{x}^o = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$$

- Vom nota cu $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x}^o)$ o estimare a lui θ , realizată pe baza setului de observații \mathbf{x}^o . Aceasta este evident o funcție de \mathbf{x}^o (vector aleator) și în consecință este de asemenea o variabilă aleatoare.

6.4 Elemente de teoria estimării

- Pentru aprecierea unui estimator se pot utiliza diverși indicatori.

- *Deplasarea* unui estimator se definește prin:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

- Se spune că estimatorul e nedeplasat dacă:

$$B(\theta) = 0$$

- Dacă $B(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ când $N \rightarrow \infty$, estimatorul se numește *asimptotic nedeplasat*.

6.4 Elemente de teoria estimării

- *Eroarea pătratică medie*:

$$\text{EPM} = E\{\hat{\theta} - \theta\}^2$$

- *Varianța și dispersia*:

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \sigma_{\hat{\theta}}^2 = E\{\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\}^2$$

- *Consistența* unui estimator. Un estimator e consistent dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, oricât de mic,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\{|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon\} = 0$$

6.4 Elemente de teoria estimării

- *Funcția de plauzibilitate* este definită prin densitatea de probabilitate

$$l(\theta) = w_x(x, \theta)$$

- În unele cazuri este mai convenabil să se lucreze cu logaritmul acestei funcții,

$$L(\theta) = \ln(w_x(x, \theta))$$

- Dacă θ este un vector cu M componente, $L(\theta)$ este și el un vector

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}) = [L(\theta_1), L(\theta_2), \dots, L(\theta_M)]^T$$

6.4 Elemente de teoria estimării

- *Măsura informației unui parametru în sensul Fischer*

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2}\right\} = -\mathbb{E}\left\{\frac{\partial^2 \ln w_x(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right\}$$

- Exprimare echivalentă

$$I(\theta) = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \ln w_x(x, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right\}$$

6.4 Elemente de teoria estimării

- O posibilitate de a găsi un estimator este de a maximiza după θ funcția de plauzibilitate,

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \arg \max_{\theta} \{w_x(\mathbf{x}, \theta)\}$$

- Un asemenea estimator se numește *de plauzibilitate maximă*.

6.4 Elemente de teoria estimării

- *Marginea Cramér-Rao* reprezintă o valoare minimă pentru varianța unui estimator nedeplasat.
- În cazul unui estimator θ scalar, presupunând că derivata a doua a funcției $L(\theta)$ există și este absolut integrabilă,

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \sigma_{\hat{\theta}}^2 \geq I^{-1}(\theta)$$

- În relația de mai sus se obține egalitate dacă și numai dacă estimatorul satisface relația

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta = K(\theta) \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}$$

în care $K(\theta)$ nu depinde de valoarea estimată.

6.4 Elemente de teoria estimării

- Dacă această limită este atinsă, se spune că estimatorul este *de varianță minimă* sau că este *eficient*.

Aplicații - 1. Estimarea valorii medii.

- Fie o variabilă aleatoare reală, gaussiană, caracterizată prin:

$$w_x(x; m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_0^2}}$$

- Să presupunem cunoscut setul de observații independente $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$. Densitatea de probabilitate de ordinul N este deci:

$$w_x(\mathbf{x}; m) = \prod_{i=0}^{N-1} w_x(x_i; m) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma_0^2}}$$

1. Estimarea valorii medii.

$$L(m) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma_0^2) - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_i - m)^2}{2\sigma_0^2}$$

$$\frac{\partial L(m)}{\partial m} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i - m}{\sigma_0^2}$$

- Egalând cu 0 această cantitate se obține estimatorul de plauzibilitate maximă:

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

- Estimatorul este nedeplasat, căci:

$$E\{\hat{m}\} = \frac{1}{N} E\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} x_i \right\} = m$$

1. Estimarea valorii medii.

- Deoarece observațiile au fost presupuse independente, varianța estimatorului este

$$\text{var}\{\hat{m}\} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \text{var}\{x_i\} = \frac{\sigma_0^2}{N}$$

- În fine, $I(m) = -E\left\{ \frac{\partial^2 L(m)}{\partial m^2} \right\} = \frac{N}{\sigma_0^2}$

deci $\text{var}(\hat{m}) = I^{-1}(m)$

așa încât estimatorul este și de varianță minimă.

- Lucrul acesta era de așteptat având în vedere că

$$\hat{m}(\mathbf{x}) - m = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i - m = \frac{\sigma_0^2}{N} \frac{\partial L(m)}{\partial m}$$

2. Estimarea dispersiei.

- Pentru același caz al variabilei gaussiene,

$$\frac{\partial L(\sigma_0^2)}{\partial(\sigma_0^2)} = -\frac{N}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma_0^4}$$

- Egalând cu zero se obține estimatorul varianței:

$$\frac{\partial L(\sigma_0^2)}{\partial(\sigma_0^2)} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - m)^2$$

- Dacă m nu este cunoscut, se va utiliza pentru el estimatorul obținut mai înainte:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \hat{m})^2$$

2. Estimarea dispersiei.

- Să calculăm valoarea medie a estimatorului:

$$\begin{aligned} E\{\hat{\sigma}_0^2\} &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (E\{x_i^2\} + E\{\hat{m}^2\} - 2E\{x_i \hat{m}\}) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(E\{x_i^2\} + \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} E\{x_l x_j\} - \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} E\{x_i x_j\} \right) \end{aligned}$$

- Observațiile fiind presupuse independente:

$$E\{x_i x_j\} = \begin{cases} E\{x_i^2\}, & i = j \\ E\{x_i\} E\{x_j\} = m^2, & i \neq j \end{cases}$$

așa încât, ținând seama și de staționaritate,

$$E\{\hat{\sigma}_0^2\} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{N-1}{N} (E\{x_i^2\} - m^2) \right) = \frac{N-1}{N} \sigma_0^2$$

2. Estimarea dispersiei.

- Se constată că estimatorii de plauzibilitate maximă a varianței sau ai dispersiei sunt deplasați. Totuși,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{\sigma}_0^2\} = \sigma_0^2$$

- deci ei sunt asimptotic nedeplasați. Uneori se preferă utilizarea *estimatorului nedeplasat al dispersiei*:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \hat{m})^2}$$

3. Estimatori pentru funcția de autocorelație

- Vom considera un proces aleator staționar $x(n)$ de valoare medie nulă, deci:

$$r_{xx}(m) = c_{xx}(m) = E\{x^*(n)x(n+m)\}$$

- Procesul fiind ergodic,

$$r_{xx}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*(n)x(n+m)$$

- Ne propunem să găsim un estimator utilizând numai setul de observații $x(n)$, $n=0, \dots, N-1$, deci pornind de la:

$$x_N(n) = \begin{cases} x(n), & n \in [0, N-1] \\ 0 & n \notin [0, N-1] \end{cases}$$

3. Estimatori pentru funcția de autocorelație

- Vom defini:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N^*(n) x_N(n+m)$$

unde M poate fi astfel ales încât să se obțină un estimator nedeplasat.

- Având în vedere suporturile finite,

$$\text{supp } x_N(n) = \overline{[0, N-1]}, \quad \text{supp } x_N^*(n+m) = \overline{[-m, N-1-m]},$$

- rezultă $\hat{r}_{xx}(m) = 0$ pentru $|m| > N-1$.

3. Estimatori pentru funcția de autocorelație

- Pentru $m=0, \dots, N-1$, limitele de însumare vor fi 0 și $N-1-m$, așa încât în general vom putea scrie:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N^*(n) x_N(n+m) & m \in \overline{[0, N-1]} \\ \hat{r}_{xx}^*(-m), & m \in \overline{[-(N-1), -1]} \\ 0, & |m| > N-1 \end{cases}$$

3. Estimatori pentru funcția de autocorelație

- Valoarea medie a estimatorului este:

$$\begin{aligned} E\{\hat{r}_{xx}(m)\} &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{N-1-m} E\{x^*(n)x(n+m)\} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{N-1-m} r_{xx}(m) = \frac{N-m}{M} r_{xx}(m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

- În mod asemănător, pentru $m = -(N-1), \dots, -1$ se obține:

$$E\{\hat{r}_{xx}(m)\} = \frac{N+m}{M} r_{xx}(m)$$

3. Estimatori pentru funcția de autocorelație

- Deci în general:

$$E\{\hat{r}_{xx}(m)\} = \frac{N-|m|}{M} r_{xx}(m), \quad m \in \overline{[-(N-1), (N-1)]}$$

- și rezultă o deplasare a estimatorului:

$$B(\hat{r}_{xx}(m)) = E(\hat{r}_{xx}(m)) - r_{xx}(m) = \frac{N-|m|-M}{M} r_{xx}(m)$$

3. Estimatori pentru funcția de autocorelație

- Pentru a obține un *estimator nedeplasat* se poate lua $M=N-|m|$ deci:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \begin{cases} \frac{1}{N-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N^*(n) x_N(n+m) & m \in \overline{[0, N-1]} \\ \hat{r}_{xx}^*(-m), & m \in \overline{[-(N-1), -1]} \\ 0, & |m| > N-1 \end{cases}$$

3. Estimatori pentru funcția de autocorelație

- sau cu o exprimare unitară:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-1} x_N^*(n) x_N(n+m), \quad m \in \overline{[-(N-1), N-1]}$$

- Uneori se preferă să se ia $M=N$ și rezultă:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N^*(n) x_N(n+m) & m \in \overline{[0, N-1]} \\ \hat{r}_{xx}^*(-m), & m \in \overline{[-(N-1), -1]} \\ 0, & |m| > N-1 \end{cases}$$

3. Estimatori pentru funcția de autocorelație

- Acesta este evident un *estimator deplasat*, deoarece:

$$E(\hat{r}_{xx}(m)) = \frac{N - |m|}{N} r_{xx}(m)$$

- Totuși când $N \rightarrow \infty$

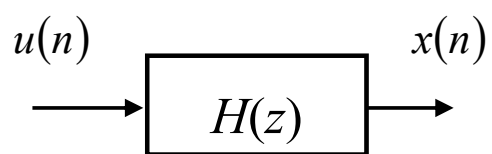
$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{r}_{xx}(m)\} = r_{xx}(m)$$

și deci estimatorul acesta este *asimptotic nedepășat*.

6.5 Modelarea Proceselor Aleatoare

■ 6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- În multe cazuri întâlnite în practică, procesul aleator poate fi modelat ca ieșire $x(n)$ a unui sistem liniar, invariant în timp, caracterizat printr-o funcție de transfer rațională, $H(z)$,



A block diagram showing an input signal $u(n)$ entering a rectangular block labeled $H(z)$. An arrow points from the block to the output signal $x(n)$.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

- căruia i se aplică la intrare un semnal $u(n)$.

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- Frecvent, $u(n)$ este un zgomot alb, el fiind cel care imprimă caracterul aleator al lui $x(n)$.
- Vom putea exprima deci $x(n)$ cu ajutorul ecuației cu diferențe finite:

$$x(n) = \sum_{k=0}^M b_k u(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k x(n-k)$$

- Model "ARMA" (auto regressive-moving average), deci *autoregresiv cu mediere mobilă*.
- $H(z)$ se presupune un filtru stabil și cauzal, așa încât nulurile lui $A(z)$ se găsesc în interiorul cercului $|z|=1$.

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 P_{uu}(e^{j\omega})$$

- În cazul când $u(n)$ este zgomot alb, cu $P_{uu}(e^{j\omega}) = \sigma^2$

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma^2 |H(e^{j\omega})|^2$$

- Fără a pierde din generalitate, vom considera că $a_0 = b_0 = 1$, deoarece câștigul filtrului poate fi încorporat în σ^2 .
- Se utilizează frecvent notația ARMA (M, N), care pune în evidență gradele numărătorului și numitorului.

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- **Forme particulare**

- Modelul *autoregresiv* (AR), notat $AR(N)=ARMA(0,N)$ se obține pentru $M=0$.

$$x(n) = -\sum_{k=1}^N a_k x(n-k) + u(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- Modelul *mediere mobilă* (MA), notat $MA(M)=ARMA(M,0)$, rezultă particularizând $N=0$:

$$x(n) = \sum_{k=0}^M b_k u(n-k)$$

$$H(z) = B(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

- Un proces $ARMA(M,N)$, pentru M și N finiți, poate fi reprezentat printr-un proces $AR(\infty)$ sau printr-un proces $MA(\infty)$.

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- Exprimarea unui proces ARMA(1,1) ca un proces AR.

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \quad |a_1| < 1, \quad |b_1| < 1$$

- Pentru a-l exprima ca un model AR, $H(z)$ trebuie pus sub forma:

$$H(z) = \frac{1}{C(z)}, \quad C(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k} = \frac{z + a_1}{z + b_1}$$

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- Dar

$$c_k = Z^{-1} \left\{ \frac{z + a_1}{z + b_1} \right\} (k)$$

- Deci

$$c_k = (a_1 - b_1)(-b_1)^{k-1} \quad \text{pentru } k \geq 1$$

- Aproximarea procesului ARMA(1,1) cu un proces AR(L), cu L finit, va fi necesar un ordin L cu atît mai mare cu cît nulul $z = -b_1$ este mai apropiat de cercul $|z|=1$.

6.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

- Exprimarea unui proces ARMA(1,1) ca un proces

$$H(z) = \frac{z + b_1}{z + a_1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k}$$

- din care

$$d_k = Z^{-1} \left\{ \frac{z + b_1}{z + a_1} \right\} (k) = (b_1 - a_1)(-a_1)^{k-1} \quad \text{pentru } k \geq 1$$

- Și în acest caz, dacă se dorește o aproximare a procesului ARMA(1,1) cu un proces MA(L) de ordin finit, L va fi cu atât mai mare cu cât polul $p = -a_1$ al procesului ARMA este situat mai aproape de cercul $|z|=1$.

6.5.2 Relații între parametrii modelului și funcția de autocorelație. Ecuațiile Yule-Walker

- Vom presupune că $u(n)$ este un zgomot alb cu valoare medie nulă și varianță. Atunci:

$$P_{xx}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \frac{B^* \left(\frac{1}{z^*} \right)}{A^* \left(\frac{1}{z^*} \right)} \sigma^2$$

6.5.2 Relații între parametrii modelului și funcția de autocorelație. Ecuațiile Yule-Walker

- Sau

$$P_{xx}(z)A(z) = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)B(z)\sigma^2$$

- Vom aplica transformata Z inversă acestei relații și vom ține seama că:

$$Z^{-1}\{P_{xx}(z)\}(k) = c_{xx}(k) = r_{xx}(k)$$

- deoarece $x(n)$ va avea și el valoarea medie nulă, și

$$Z^{-1}\left\{H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\right\}(n) = h^*(-n)$$

6.5.2 Relații între parametrii modelului și funcția de autocorelație. Ecuațiile Yule-Walker

- Rezultă, folosind teorema convoluției și cauzalitatea secvenței $h(n)$:

$$\sum_{l=0}^N a_l r_{xx}(k-l) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{l=0}^M b_l h^*(l-k) = \sigma^2 \sum_{l=k}^M b_l h^*(l-k), & k = \overline{[0, M]} \\ 0, & k \geq M+1 \end{cases}$$

- De unde:

$$r_{xx}(k) = \begin{cases} -\sum_{l=1}^N a_l r_{xx}(k-l) + \sigma^2 \sum_{l=k}^M b_l h^*(l-k), & k = \overline{[0, M]} \\ -\sum_{l=1}^N a_l r_{xx}(k-l), & k \geq M+1 \end{cases}$$



6.5.2 Relații între parametrii modelului și funcția de autocorelație. Ecuațiile Yule-Walker

- În principiu, ele permit determinarea parametrilor modelului dacă se cunosc funcțiile de autocorelație.
- Rezolvarea sistemului este simplă doar în cazul proceselor AR, când, deoarece $M=0$, dispare practic a doua sumă, care imprimă un caracter neliniar ecuațiilor.
- Pe de altă parte, ecuațiile Yule-Walker oferă o metodă recursivă de calcul a funcțiilor de autocorelație, dacă sunt cunoscuți parametrii modelului.



6.5.2 Relații între parametrii modelului și funcția de autocorelație. Ecuațiile Yule-Walker

- Alegerea unui model adecvat procesului studiat este esențială. Este util ca modelul ales să aibă un număr minim de parametri.
- În cazul în care procesul studiat se caracterizează printr-o densitate spectrală de putere cu maxime "ascuțite", este indicată alegerea unui model AR, știind că asemenea maxime se obțin datorită unor poli situați în apropierea cercului $|z|=1$.



6.5.2 Relații între parametrii modelului și funcția de autocorelație. Ecuațiile Yule-Walker

- Dacă, din contră, ea se caracterizează prin minime pronunțate, eventual anulări, este indicată alegerea unui model MA cu zerouri situate în apropierea sau pe cercul $|z|=1$.
- Când intervin ambele tipuri de comportări ale densității spectrale de putere, se va alege un model ARMA.
- Un alt parametru ce trebuie avut în vedere este și panta caracteristicii densitate spectrală de putere - frecvență. O pantă mare (variație rapidă) va necesita pentru simulare un proces AR sau ARMA de ordin mare.